Primer Parcial de Álgebra II

Ejercicio 1. Sea G un grupo. Probar que si $\mathrm{Aut}(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano. (Sugerencia: considere el grupo de automorfismos de la forma c_g - conjugar por g).

Ejercicio 2. Consideremos el subgrupo de $G = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{S}_7$

$$H = \{(a, b, c, \sigma) : a = 0,\ 17 | b + c,\ \sigma \in \mathbb{A}_7\}.$$

(a) Probar que H es normal y caracterizar el cociente G/H.

(b) ¿Existe algún subgrupo normal K de G tal que $H \cap K = \{1\}$ y $G = H.K$?

Ejercicio 3. Sea A un anillo conmutativo. Decimos que dos ideales $I, J \subset A$ son *coprimos* entre sí cuando $A = I + J$. Supongamos que $I_1, \ldots, I_r \subseteq A$ son ideales coprimos dos a dos.

(a) Probar que $I_1 \cdots I_r = I_1 \cap \cdots \cap I_r$.

(b) Demuestre que $A/I_1 \cdots I_r \simeq A/I_1 \times \cdots \times A/I_r$.

Ejercicio 4. Sea A un dominio íntegro. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe una valuación discreta $v : \mathcal{K}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que

$$A = \{x : v(x) \geq 0\} \subseteq \mathcal{K}(A).$$

(b) A es un domínio euclídeo local.

(c) A es un dominio de ideales principales local,

Ejercicio 5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y consideremos el anillo $A = \mathrm{End}_K(V)$. Para cada subespacio vectorial $U \subset V$ definimos

$$I_U = \{f \in A : U \subset \ker(f)\}, \quad D_U = \{f \in A : \mathrm{im}(f) \subset U\}.$$

(a) Demostrar que I_U es un ideal a izquierda y D_U es un ideal a derecha.

(b) Todo ideal a izquierda (resp. derecha) de A es igual a I_U (resp. D_U) para algún subespacio U.

(c) A tiene exactamente dos ideales biláteros.